ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 10

PROBLEMLER

1) $I \subset \mathbb{R}$ açık aralık, $\alpha : I \to E^n$ fonksiyonu $\forall t \in I$ için dif.bilir ve $\|\alpha(t)\| = 1$ ise $\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\|\alpha(t)\| = 1$ olduğundan $\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = 1$ dir.

$\Rightarrow \alpha'(t)[\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle] = \alpha'(t)[1] = 0$

$\Rightarrow 2\langle D_{\alpha'(t)}\alpha(t), \alpha(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle D_{\alpha'(t)}\alpha(t), \alpha(t) \rangle = 0$ olur.

O halde $D_{\alpha'(t)}\alpha(t)$ yi hesaplamalıyız. Hatta $D_{\alpha'(t)}\alpha(t) = \alpha'(t)$ olduğunu göstermeliyiz. Burada $\alpha'(t) = \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$ anlamındaki tanjant vektördür. $\alpha(t)$ ise bir vektör alanı olup $X(\alpha(t)) = \alpha(t)\big|_{\alpha(t)}$ şeklindedir. Yani bir X vektör alanının α eğrisine kısıtlanmışıdır.
$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ vektör alanını α eğrisine kısıtlamak demek Xin α eğrisinin noktalarına tanjant vektör karşılık getirmesi demektir. Yani,

$$X(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)}$$ olması demektir.

$$D_{\alpha'(t)}\alpha(t) = D_{\alpha'(t)}X = \left(\alpha'(t)[a_1], \alpha'(t)[a_2], \dots, \alpha'(t)[a_n]\right)$$

$$= \left(\frac{d(a_1 \circ \alpha)}{dt}\Big|_t, \frac{d(a_2 \circ \alpha)}{dt}\Big|_t, \dots, \frac{d(a_n \circ \alpha)}{dt}\Big|_t\right) \quad \text{“}\alpha'(t)[f] = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_t\text{”}$$

$$= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}\Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\Big|_t\right)$$

$= \alpha'(t)$ olur.

$\Rightarrow \langle D_{\alpha'(t)}\alpha(t), \alpha(t)\rangle = 0$ dan $\langle \alpha'(t), \alpha(t)\rangle = 0$ bulunur.

2) $\alpha : I \to E^n$ eğrisi için $\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} = T_{\alpha(t)}$ olsun. α eğrisi boyunca $D_T T = 0$ ise α nın bir doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Bir önceki örnekten $D_{\alpha'(t)}\alpha(t) = \dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t)$ idi.

$\Rightarrow D_T T = D_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha'}{dt} = \alpha''(t)$ olur.

$D_T T=0$ olduğundan $\alpha''(t)=0 \Rightarrow \alpha_i''(t)=0$, $1\leq i\leq n$

$\Rightarrow \alpha_i'(t)=c_i=$ sabit, $1\leq i\leq n$

$\Rightarrow \alpha_i(t)=c_i t+d_i$, $1\leq i\leq n$

$\Rightarrow \alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\dots,\alpha_n(t))$

$=(c_1t+d_1, c_2t+d_2,\dots,c_nt+d_n)$

$=(d_1,d_2,\dots,d_n)+t(c_1,c_2,\dots,c_n)$

O halde α, $(d_1,d_2,\dots,d_n)$ noktasından geçen $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ doğrultmanlı bir doğrudur.

3) Aşağıda verilen vektör alanlarının $(-1,1)$ noktasından geçen maksimal integral eğrilerini bulunuz.

a) $X=(0,1)$ b) $X(p)=-p$ c) $X(x_1,x_2)=(x_2,-x_1)$ d) $X(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$

Çözüm: $X(\alpha(t)) = \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$ oluyorsa α eğrisine X in bir integral eğrisi denir. Eğer $p \in E^n$ için $\alpha(0) = p$ ise α ya p noktasından geçen maksimal integral eğrisi denir.

a) $X = (0,1)$, $P = (-1,1)$

$X(\alpha(t)) = \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} \Rightarrow (0,1)\big|_{\alpha(t)} = \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$

$\Rightarrow \alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t)) = (0,1)$

$\Rightarrow \alpha_1'(t) = 0$ olup $\alpha_1(t) = a =$ sabit ve $\alpha_2'(t) = 1$ olup $\alpha_2(t) = t + b$ olur.

$\Rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (a, t+b)$ bulunur.

$\alpha(0) = P$ olacağından $(a,b) = (-1,1) \Rightarrow a = -1,\ b = 1$

$\Rightarrow \alpha(t) = (-1, t+1)$ bulunur.

b) $X(P) = -P$

$$X(\alpha(t)) = \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} \Rightarrow -\alpha(t) = \alpha'(t)$$

$$\Rightarrow (-\alpha_1(t), -\alpha_2(t)) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))$$

$$\Rightarrow \alpha_1'(t) = -\alpha_1(t) \text{ ve } \alpha_2'(t) = -\alpha_2(t)$$

$$\Rightarrow \alpha_1(t) = c_1 e^{-t}, \ \alpha_2(t) = c_2 e^{-t}$$

olur. O halde $\alpha(t) = (c_1 e^{-t}, c_2 e^{-t})$ dir.

$\alpha(0) = P = (-1,1)$ olacağından $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ bulunur.

$$\Rightarrow \alpha(t) = (-e^{-t}, e^{-t}) \text{ olur.}$$

c) $X(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$

$$X(\alpha(t)) = \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} \Rightarrow (\alpha_2(t), -\alpha_1(t)) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))$$

$\Rightarrow \alpha_1'(t) = \alpha_2(t)$ ve $\alpha_2'(t) = -\alpha_1(t)$ elde edilir.

$\Rightarrow \alpha_1''(t) = \alpha_2'(t)$ olup $\alpha_1''(t) = -\alpha_1(t)$ ve

$\alpha_2''(t) = -\alpha_1'(t)$ olup $\alpha_2''(t) = -\alpha_2(t)$ olur.

$\Rightarrow \alpha_1(t) = A\cos t + B\sin t$ « $y'' + y = 0$ ın çözümü $y = A\cos t + B\sin t$ dir »

$\alpha_1(t) = A\cos t + B\sin t$ idi.

$\alpha_2(t) = \alpha_1'(t)$ olduğundan $\alpha_2(t) = -A\sin t + B\cos t$ bulunur.

$\Rightarrow \alpha(t) = (A\cos t + B\sin t, -A\sin t + B\cos t)$ olur.

$\alpha(0) = (-1,1)$ olacağından $A=-1, B=1$ dir.

$\Rightarrow \alpha(t) = (-\cos t + \sin t, \sin t + \cos t)$

d) $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

$X(\alpha(t)) = \alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)} \Rightarrow (\alpha_2(t), \alpha_1(t)) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))$

$\Rightarrow \alpha_1(t) = \alpha_2'(t), \ \alpha_2(t) = \alpha_1'(t)$

$\Rightarrow \alpha_2''(t) = \alpha_1'(t)$ olup $\alpha_2''(t) = \alpha_2(t)$ ve

$\alpha_1''(t) = \alpha_2'(t)$ olup $\alpha_1''(t) = \alpha_1(t)$ bulunur.

$y'' - y' = 0$ ın çözümü $y = ae^{x} + be^{-x}$ olacağından

$\alpha_1(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$, $\alpha_2(t) = Ae^{t} - Be^{-t}$ olur.

$\alpha(0) = (-1,1)$ olduğundan $A=0, B=-1$ bulunur.

$\Rightarrow \alpha(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$

4) Aşağıdaki ifadelerden, X vektör alanının $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} ;\ i=1,2,3\right\}$ bazına göre bileşenlerini hesaplayınız.

a) $2x_3^2 \frac{\partial}{\partial x_1} = 7X + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$

b) $X_P = (P_1, P_3 - P_1, 0)|_P \quad , \forall P=(P_1,P_2,P_3) \in E^3$

c) $X = 2\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) - x_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$

d) $X_P = (1+P_1, P_2 P_3, P_2)$

e) $\forall P \in E^3$ için X_P, P den orijine bir yönlü doğru parçası yardımıyla tanımlı vektördür.

Çözüm:

a) $X = \left(\frac{2}{7} x_3^2, 0, -\frac{1}{7} x_1 x_2\right)$ b) $X_P = P_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P + (P_3 - P_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P = x_1(P)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P + (x_3 - x_1)(P)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P$

$= \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_3 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(P)$

c) $X = (x_1, 2x_2 + x_1 x_2^2, 0)$

$\Rightarrow X = (x_1, x_3 - x_1, 0)$

d) $X_p = (1+p_1, p_2p_3, p_2) = (1+p_1)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p + p_2p_3\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p + p_2\frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_p$

$$= (1+x_1)(p)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p + (x_2x_3)(p)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p + x_2(p)\frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_p$$

$$= \left((1+x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\right)(p)$$

$\Rightarrow X = (1+x_1, x_2x_3, x_2)$

e) $X_p = \vec{PO} = -\vec{OP} = (-p_1, -p_2, -p_3) \quad X = (-x_1, -x_2, -x_3)$

5) $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, $1 \leq i, j \leq n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall f \in C(E^n, \mathbb{R})$ için

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right](f) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}[f]\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[f]\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$= 0$$

$$= 0(f)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$$

6) $X = x_2^2 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1^2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_1 x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$ ve $Y = x_3 \dfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_2^2 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$

vektör alanları veriliyor. $D_X Y$, $D_Y X$ ve $[X,Y]$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$D_X Y = (X[y_1], X[y_2], X[y_3])$$
$$= (X[x_3], X[-x_1], X[x_2^2])$$

$$X[x_3] = x_2^2 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} - x_1^2 \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + x_1 x_2 \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = x_1 x_2$$

$$X[-x_1] = x_2^2 \cdot \frac{\partial(-x_1)}{\partial x_1} = -x_2^2 \quad , \quad X[x_2^2] = -x_1^2 \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2} = -x_1^2 \cdot 2x_2 = -2x_1^2 x_2$$

$\Rightarrow D_X Y = (x_1 x_2, -x_2^2, -2x_1^2 x_2)$ olur. Benzer şekilde $D_Y X = (-2x_1 x_2, -2x_1 x_3, x_2 x_3 - x_1^2)$ bulunur.

$$[X,Y] = D_X Y - D_Y X = (3x_1 x_2, 2x_1 x_3 - x_2^2, x_1^2 - x_2 x_3 + 2x_1^2 x_3)$$

elde edilir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Problem Çözümü

Ders 10