ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 9

LİE OPERATÖRÜ

V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$[\,,\,] : V \times V \to V$$
$$(x,y) \to [x,y]$$

dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu dönüşüme V üzerinde bir Lie operatörü veya parantez operatörü denir.

1) Bilineerdir (2-lineerdir):

$\forall x,y,z \in V$ ve $\forall a,b \in K$ için $[ax+by,z] = a[x,z] + b[y,z]$,

$[x, ay+bz] = a[x,y] + b[x,z]$

2) Alternedir:

$\forall x \in V$ için $[x,x] = 0$

3) Jacobi özdeşliğini sağlar: $\forall x,y,z \in V$ için

$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ dır.

Lie Cebiri : Üzerinde Lie operatörü tanımlı vektör uzayına Lie cebiri denir.

Teorem 9 : $\mathcal{X}(E^n)$ üzerinde,

$$[\,,\,]: \mathcal{X}(E^n) \times \mathcal{X}(E^n) \longrightarrow \mathcal{X}(E^n)$$

$$(X,Y) \longrightarrow [X,Y] : C(E^n,\mathbb{R}) \longrightarrow C(E^n,\mathbb{R})$$

$$f \rightarrow [X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanan $[\,,\,]$ dönüşümü bir Lie operatörüdür. Burada $Xf = X[f]$.

İspat :

1) $[\,,\,]$ dönüşümü bilineerdir :

$\forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(E^n)$ ve $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $[aX+bY, Z] \overset{?}{=} a[X,Z] + b[Y,Z]$

$\forall f \in C(E^n,\mathbb{R})$ için $[aX+bY,Z](f) = (aX+bY)(Zf) - Z((aX+bY)[f])$

$$= aX(Zf) + bY(Zf) - Z(aXf + bYf)$$

$$= aX(Zf) + bY(Zf) - aZ(Xf) - bZ(Yf)$$

$$= a[X,Z](f) + b[Y,Z](f)$$

$$= (a[X,Z] + b[Y,Z])(f)$$

$$\Rightarrow [aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z] \text{ dir.}$$

Benzer şekilde $[X, aY+bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]$ dir.

$\Rightarrow [\,,\,]$ dönüşümü bilineerdir.

2) $[\,,\,]$ alternedir: $\forall X \in \chi(E^n)$ için $[X,X] \overset{?}{=} 0$

$\forall f \in C(E^n, \mathbb{R})$ için $[X,X](f) = X(Xf) - X(Xf) = 0 = O(f)$

$$\Rightarrow [X,X] = 0$$

3) Jacobi özdeşliği: $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ için

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \overset{?}{=} 0$$

$\forall f \in C(E^n, \mathbb{R})$ için $[X,[Y,Z]](f) = X([Y,Z](f)) - [Y,Z](Xf)$

$$= X(Y(Zf) - Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf))$$

$$= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf))$$

Benzer şekilde,

$$[Y,[Z,X]](f) = Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Y(f)))$$

$$[Z,[X,Y]](f) = Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf))$$

bulunur. Böylece

$$[X,[Y,Z]](f)+[Y,[Z,X]](f)+[Z,[X,Y]](f)=0$$

$$\Rightarrow ([X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]])(f)=0=O(f)$$

$$\Rightarrow [X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \text{ olur.}$$

Sonuç: $\chi(E^n)$ bir Lie cebiridir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ 3_boyutlu uzayı üzerinde tanımlanan

$$\wedge: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha,\beta) \longrightarrow \alpha \wedge \beta = \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e}_i,\alpha,\beta)\,\vec{e}_i$$

vektörel çarpımı ile birlikte bir Lie cebiridir. Burada, $\vec{e}_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\delta_{i3})$, $1\leq i\leq 3$ dir.

Çözüm:

1) Bilineerlik: $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}^3$ için

$$(a\alpha+b\beta)\wedge\gamma \stackrel{?}{=} a(\alpha\wedge\gamma)+b(\beta\wedge\gamma)$$

$$(a\alpha+b\beta)\wedge\gamma = \sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i}, a\alpha+b\beta, \gamma)\,\vec{e_i}$$

determinant fonksiyonu 3-lineer olduğundan

$$= a\sum_{i=1}^{3} \det(\vec{e_i},\alpha,\gamma)\,\vec{e_i} + b\sum_{i=1}^{3}\det(\vec{e_i},\beta,\gamma)\,\vec{e_i}$$

$$= a(\alpha\wedge\gamma)+b(\beta\wedge\gamma)$$

Benzer şekilde $\alpha\wedge(a\beta+b\gamma) = a(\alpha\wedge\beta)+b(\alpha\wedge\gamma)$ dır.

2) Alterne: $\forall \alpha \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha\wedge\alpha = 0$?

$$\alpha\wedge\alpha = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\det(\vec{e_i},\alpha,\alpha)}_{0}\,\vec{e_i} = 0$$

3) Jacobi özdeşliği: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) + \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) \stackrel{?}{=} 0$$

Vektörel çarpımın özelliğinden,

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \gamma \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) + \beta \wedge (\gamma \wedge \alpha) + \gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = \langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \alpha, \beta \rangle \gamma + \langle \beta, \alpha \rangle \gamma$$
$$- \langle \beta, \gamma \rangle \alpha + \langle \gamma, \beta \rangle \alpha - \langle \gamma, \alpha \rangle \beta$$
$$= 0$$

Örnek: V bir vektör uzayı olmak üzere

$$[\,,\,] : V \times V \longrightarrow V$$
$$(\alpha, \beta) \rightarrow [\alpha, \beta] = \vec{0}$$

dönüşümü bir Lie operatörüdür.

Örnek: $n\times n$ tipindeki reel bileşenli matrislerin uzayı $\mathbb{R}^n{}_n$ olmak üzere

$$[\,,\,]: \mathbb{R}^n{}_n \times \mathbb{R}^n{}_n \longrightarrow \mathbb{R}^n{}_n$$
$$(A,B) \longrightarrow [AB] = AB - BA$$

dönüşümü bir Lie operatörüdür.

Teorem 10. $\forall X,Y \in \chi(E^n)$, $\forall f,g \in C(E^n,\mathbb{R})$ için

1) $[X,Y](fg) = f[X,Y](g) + g[X,Y](f)$

2) $[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$

3) $[X,Y] = -[Y,X]$

İspat:

1) $[X,Y](fg) = X(Y(fg)) - Y(X(fg))$

$$= X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f))$$
$$= X(fY(g)) + X(gY(f)) - Y(fX(g)) - Y(gX(f))$$
$$= fX(Y(g)) + Y(g)X(f) + gX(Y(f)) + X(g)Y(f) - fY(X(g)) - Y(f)X(g)$$
$$- gY(X(f)) - Y(g)X(f)$$

$$= fX(Y(g)) - fY(X(g)) + gX(Y(f)) - gY(X(f))$$

$$= f[X,Y](g) + g[X,Y](f)$$

2) $[fX, gY] \stackrel{?}{=} f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$

$\forall h \in C(E^n, \mathbb{R})$ için

$$[fX, gY](h) = (fX)(gY(h)) - (gY)(fX(h))$$

$$= fX(gY(h)) - gY(fX(h))$$

$$= f\big(X(g)Y(h) + g\,X(Y(h))\big) - g\big(Y(f)X(h) + f\,Y(X(h))\big)$$

$$= fX(g)Y(h) + fgX(Y(h)) - gY(f)X(h) - gfY(h(h))$$

$$= (fX(g)Y)(h) - (gY(f)X)(h) + fg[X,Y](h)$$

$$= (fX(g)Y - gY(f)X + fg[X,Y])(h)$$

$\Rightarrow [fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X,Y]$ olur.

3) $[X,Y] \stackrel{?}{=} -[Y,X]$

$\forall f \in C(E^n, \mathbb{R})$ için $\quad [X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf) = -\big(Y(Xf) - X(Yf)\big)$

$$= -[Y,X](f)$$

$\Rightarrow [X,Y] = -[Y,X]$

Teorem 11. $X, Y \in \chi(E^n)$ için

1) $[X,Y] = D_X Y - D_Y X$

2) $X[\langle Y,Z\rangle] = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$

İspat:

2) $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $y_i, z_i \in C(E^n, \mathbb{R})$, $1 \le i \le n$ olsun.

$$X[\langle Y,Z\rangle] = X[y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n]$$
$$= X[y_1 z_1] + X[y_2 z_2] + \dots + X[y_n z_n]$$
$$= y_1 X[z_1] + z_1 X[y_1] + y_2 X[z_2] + z_2 X[y_2] + \dots + y_n X[z_n] + z_n X[y_n]$$
$$= (y_1 X[z_1] + y_2 X[z_2] + \dots + y_n X[z_n]) + (z_1 X[y_1] + z_2 X[y_2] + \dots + z_n X[y_n])$$

$D_X Z = (X[z_1], X[z_2], \dots, X[z_n])$, $D_X Y = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n])$

$\langle D_X Z, Y\rangle = y_1 X[z_1] + y_2 X[z_2] + \dots + y_n X[z_n]$

$\langle D_X Y, Z\rangle = z_1 X[y_1] + z_2 X[y_2] + \dots + z_n X[y_n]$

olup $X[\langle Y,Z\rangle] = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$ bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Lie Operatörü

Ders 9