ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

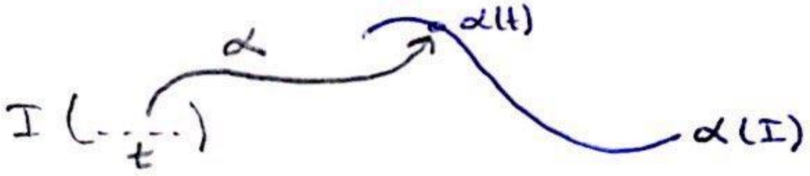
Ders 8

KOVARYANT TÜREV

Tanım: $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$

$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

dif.bilir fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n de bir **eğri** denir.



$$\alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)} = \frac{d\alpha}{dt}\Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}\Big|_t, \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}\Big|_t \right)$$

$$= \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right)\Big|_{\alpha(t)}$$

vektörüne α eğrisinin **hız vektörü** adı verilir.

$\alpha'(t)|_{\alpha(t)}$ vektörü, eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektörüdür. Bir nokta ve bir vektör ikilisi tanjant vektör meydana getirdiğinden $\alpha'(t)|_{\alpha(t)}$ bir tanjant vektördür. Yani $\alpha'(t)|_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}\alpha(t)$ dir.

$\alpha'(t)|_{\alpha(t)}$ bir tanjant vektör olduğundan bir $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ fonksiyonunun bu vektör yönündeki türevinden bahsedilebilir:

Teorem 7: α, E^n de bir eğri ve $f: E^n \to \mathbb{R}$ dif.bilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f(\alpha))}{dt} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \quad \text{dır.}$$

İspat:

$\vec{V}_p \in T_{E^n}(p)$ ve $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ için $\vec{V}_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\vec{V}_p = \alpha'(t)|_{\alpha(t)} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)\Big|_{\alpha(t)} \quad \text{alınırsa}$$

$$\alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)}[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)} \quad \text{....} ① \quad \text{olur.}$$

$(f\circ\alpha)\big|_t = f(\alpha(t)) = f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$ dir.

$$\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\Big|_t = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\cdot\frac{d\alpha_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_n}\cdot\frac{d\alpha_n}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \quad \text{---} ②$$

Ayrıca $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Öklid koordinat fonksiyonları olduğundan $x_i(\alpha(t)) = \alpha_i(t)$ yazılabilir.

① den $\alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)}[f] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ --- ③ olur.

② ve ③ den $\alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)}[f] = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\Big|_t$ veya

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha) \quad \text{bulunur.}$$

Tanım: $\alpha'(t)[f] = D_{\alpha'(t)} f$ olarak da yazılır. Bu türeve, $f: E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α eğrisi boyunca kovaryant türevi adı verilir.

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \text{ olmak üzere}$$

$$\alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)}[f] = D_{\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}} f = \langle \vec{\nabla} f, \alpha' \rangle \Big|_t \text{ yazılabilir.}$$

İntegral Eğrisi:

$\alpha: I \to E^n$ bir eğri ve $X \in \chi(E^n)$ bir vektör alanı olsun. $X(\alpha(t)) = X_{\alpha(t)} = \frac{d\alpha}{dt}$ oluyorsa α ya X vektör alanının bir integral eğrisi denir. Bu tanıma göre X vektör alanı, α eğrisi üzerindeki noktalara eğrinin teğeti olan tanjant vektörü karşılık getirir.

Bir vektör alanının bir diğer vektör alanına göre kovaryant türevi

$Y \in \chi(E^n)$ dif.bilir olmak üzere $X, Y \in \chi(E^n)$ vektör alanları verilsin. Bir $P \in E^n$ için $X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n)\big|_p \in T_{E^n}(P)$ ve $Y_p = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in T_{E^n}(P)$ olsun. Y nin dif.bilir olması demek, $y_i : E^n \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ fonksiyonlarının dif.bilir olması demektir. Y nin X e göre kovaryant türevi $D_X Y$ ile gösterilir ve

$$D_X Y = (X[y_1], X[y_2], \dots, X[y_n])$$

ile tanımlanır. Burada $X[y_i] \in C(E^n, \mathbb{R})$, $1 \le i \le n$ olup $D_X Y \in \chi(E^n)$ dir.

Yani, $D : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$ şeklindedir.

$$(X, Y) \to D(X, Y) = D_X Y$$

$P \in E^n$ için

$$(D_X Y)(P) = D_{X_p} Y_p = (X_p[y_1], X_p[y_2], \dots, X_p[y_n])$$

dir.

Buna göre,

$$D: \chi(E^n) \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$$

$$(X,Y) \to D_X Y : E^n \to \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P)$$

$$P \to (D_X Y)(P) = D_{X_P} Y_P \quad \text{dir.}$$

Örnek:

E^3 de $X=(a,b,c)$, $Y=(xy^2+4z,\ y^2-x,\ x+z^3)$ vektör alanları verilsin. $P=(1,1,1) \in E^3$ noktasında $D_X Y$ kovaryant türevini hesaplayınız.

Çözüm: $(D_X Y)(P) = D_{X_P} Y_P = \left(X_P[y_1], X_P[y_2], X_P[y_3] \right)$, $y_1 = xy^2+4z$, $y_2 = y^2-x$, $y_3 = x+z^3$ dir.

$$X_P[y_1] = a \frac{\partial y_1}{\partial x}\Big|_P + b \frac{\partial y_1}{\partial y}\Big|_P + c \frac{\partial y_1}{\partial z}\Big|_P = a y^2|_P + b(2xy)|_P + c4|_P$$

$$= a p_2^2 + 2b p_1 p_2 + 4c$$

$$= a+2b+4c \quad \text{olur.}$$

Benzer biçimde $X_P[y_2] = -a+2b$, $X_P[y_3] = a+3c$ bulunur.

O halde $D_{X_P} Y_P = (a+2b+4c,\ -a+2b,\ a+3c)$ olur.

Teorem 8: $X, W \in \chi(E^n)$ iki vektör alanı ve $Y, Z \in \chi(E^n)$ de dif.bilir iki vektör alanı olsun. Bu durumda,

i) $D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z$

ii) $D_{X+W}(Y) = D_X Y + D_W Y$

iii) $D_{f(P)X} Y = f(P) D_X Y$, $f: E^n \to \mathbb{R}$, $P \in E^n$

iv) $D_X(fY) = f D_X Y + X[f] Y$, $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ dir.

İspat:

$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ve $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ olsun. Y ve Z dif.bilir olduğundan y_i ve z_i ler dif.bilirdir.

i) $Y + Z = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$ olup

$$D_X(Y+Z) = (X[y_1 + z_1], X[y_2 + z_2], \ldots, X[y_n + z_n])$$

Teo. 6/ii den

$$= (X[y_1] + X[z_1], X[y_2] + X[z_2], \ldots, X[y_n] + X[z_n])$$

$$= (X[y_1], \ldots, X[y_n]) + (X[z_1], \ldots, X[z_n])$$

$$= D_X Y + D_X Z$$

iv) $fY = (fy_1, fy_2, \dots, fy_n)$ dir. Buna göre,

$$D_X(fY) = (X[fy_1], X[fy_2], \dots, X[fy_n])$$

teoblüü dan

$$= (fX[y_1] + y_1X[f], \dots, fX[y_n] + y_nX[f])$$

$$= (fX[y_1], \dots, fX[y_n]) + (y_1X[f], \dots, y_nX[f])$$

$$= f(X[y_1], \dots, X[y_n]) + X[f](y_1, \dots, y_n)$$

$$= fD_XY + X[f]Y$$

Bir Eğri Boyunca Kovaryant Türev

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki

hız vektörü $T = \alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\right)$ ile verilsin. Bir $Y \in \chi(E^n)$ dif.bilir vektör alanının α nın hız vektörü yönündeki kovaryant türevi veya α eğrisi boyunca kovaryant türevi $D_TY = (T[y_1], \dots, T[y_n])$ dir.

$D_TY = 0$ ise Y ye α boyunca paralel vektör alanı, $D_TT = 0$ ise α eğrisine geodezik eğri denir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Kovaryant Türev

Ders 8