ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 6

YÖNE GÖRE TÜREV VE KOVARYANT TÜREV

Hatırlatma: Tek değişkenli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ fonksiyonu için x i x i azaltarak veya arttırarak fonksiyondaki değişimi x e göre türev yardımıyla inceleyebiliriz.

İki değişkenli $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunda ise iki seçenek vardır: x i arttırıp azaltabiliriz veya y yi arttırıp azaltabiliriz. x i arttırdığımızda fonksiyonun değişim değerini bize x e göre kısmi türev, y yi arttırdığımızda fonksiyonun değişim değerini ise y ye göre kısmi türev verir. Yani girdiyi x veya y yönünde ittiğimizde f nin değişim hızını x ve y ye göre kısmi türevler ile hesaplarız.

Şimdi bir $f(x,y)$ fonksiyonunun bir yön boyunca (vektör) türevini ifade edelim: İki boyutlu düzlemde gidebileceğimiz yönler sadece x ve y değildir. Keyfi olarak herhangi bir yönde fonksiyonu değiştirebiliriz.

Herhangi bir yönde fonksiyonun girdilerini değiştirdiğimizde fonksiyonun ne kadar değiştiğini yönlü türev ile anlarız. Yani f nin girdisini x veya y ye paralel olmayan bir yönde ittiğimizde f nin hangi hızla değişeceğini yönlü türev ile belirleriz.

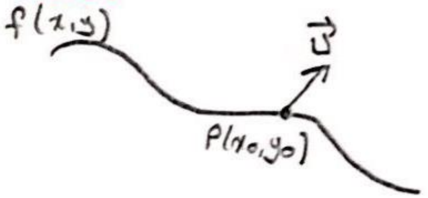
Yönlü türev nasıl hesaplanır: Seçilen yöndeki birim vektör $\vec{u}=(a,b)$ olsun. (x_0,y_0) noktasındaki $\vec{u}$ vektörü yönündeki yönlü türev,

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0).a + f_y(x_0,y_0).b$$

ile hesaplanır. Bu ifade f nin seçtiğimiz $\vec{u}$ yönündeki değişim hızını verir.

Uyarı: x ekseni yönünde türev alındığında $\vec{u}=(1,0)$ olup $D_{\vec{u}}f = f_x$ olacağına dikkat ediniz. (beklenen sonuç)

Not:



Fonksiyonun hareketi şekildeki gibi olsun. $\vec{u}$ vektörü boyunca yönlü türev alındığında fonksiyonun yön boyunca nasıl bir değişim gösterdiğini anlarız:

Bu yön boyunca yönlü türev pozitif ise bu durum, bu yöne doğru bir çıkıntının olacağı, negatif ise a noktada bir çukurluk olacağı anlamına gelir.

Yukarıdakiler yönlü türev ile ilgili olarak Analiz derslerinden bildiğimiz kavramlardır.

Tanım: $f: E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bir $a \in E^n$ noktası için

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} = \lambda(h), \quad h \in E^n$$

olacak şekilde $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineer dönüşümü bulunabiliyorsa f ye $a \in E^n$ noktasında türevlenebilirdir denir. $a \in E^n$ noktasında türevlenebilen $f: E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesi $C(a, \mathbb{R})$ ile gösterilir. $\forall a \in E^n$ noktasında türevlenebilen $f: E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesi ise $C(E^n, \mathbb{R})$ ile gösterilir. "Türevlenebilir" ifadesinin yerine "diferansiyellenebilir" ifadesi de kullanılabilir.

$f: E^n \to \mathbb{R}$ dif.bilir fonksiyon olsun. f nin bir $\vec{V}_p \in T_{E^n}(P)$ tangent vektörü yönündeki türevi $\vec{V}_p[f]$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım: $f \in C(E^n, \mathbb{R})$ ve $\vec{V}_p \in T_{E^n}(P)$ için f nin $\vec{V}_p$ tangent vektörü yönündeki türevi,

$$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt}\left(f(P + t\vec{V})\right)\Big|_{t=0}$$

ile tanımlanır.

Örnek: $f: E^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 + x_3^2 + x_n^3$ olsun.
$P = (1,1,0,\ldots,0) \in E^n$ ve $\vec{V} = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$ için $\vec{V}_p[f] = ?$

Çözüm:

$$P + t\vec{V} = (1+t, 1+t, t, \ldots, t) \Rightarrow f(P+t\vec{V}) = (1+t)^2 + t^2 + t^3$$

$$\frac{d}{dt}(f(P+t\vec{V})) = 2(1+t) + 2t + 3t^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(f(P+t\vec{V}))\Big|_{t=0} = 2$$

$$\Rightarrow \vec{V}_p[f] = 2$$

Örnek: $f: E^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz^2$ olsun. $P = (1,0,2) \in E^3$ ve $\vec{v} = (0,1,-3) \in \mathbb{R}^3$ için $\vec{v}_P[f] = ?$

Çözüm:

$$P + t\vec{v} = (1, t, 2-3t) \Rightarrow f(P+t\vec{v}) = t(2-3t)^2$$

$$\frac{d}{dt}(f(P+t\vec{v})) = (2-3t)^2 + 2(2-3t)(-3).t \Rightarrow \frac{d}{dt}(f(P+t\vec{v}))\Big|_{t=0} = 4$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P[f] = 4$$

Örnek: $f: E^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = a =$ sabit veriliyor. $\forall \vec{v}_P \in T_{E^n}(P)$ için $\vec{v}_P[f] = ?$

Çözüm:

$$f(P+t\vec{v}) = a \Rightarrow \frac{d}{dt}(f(P+t\vec{v})) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(f(P+t\vec{v}))\Big|_{t=0} = 0$$

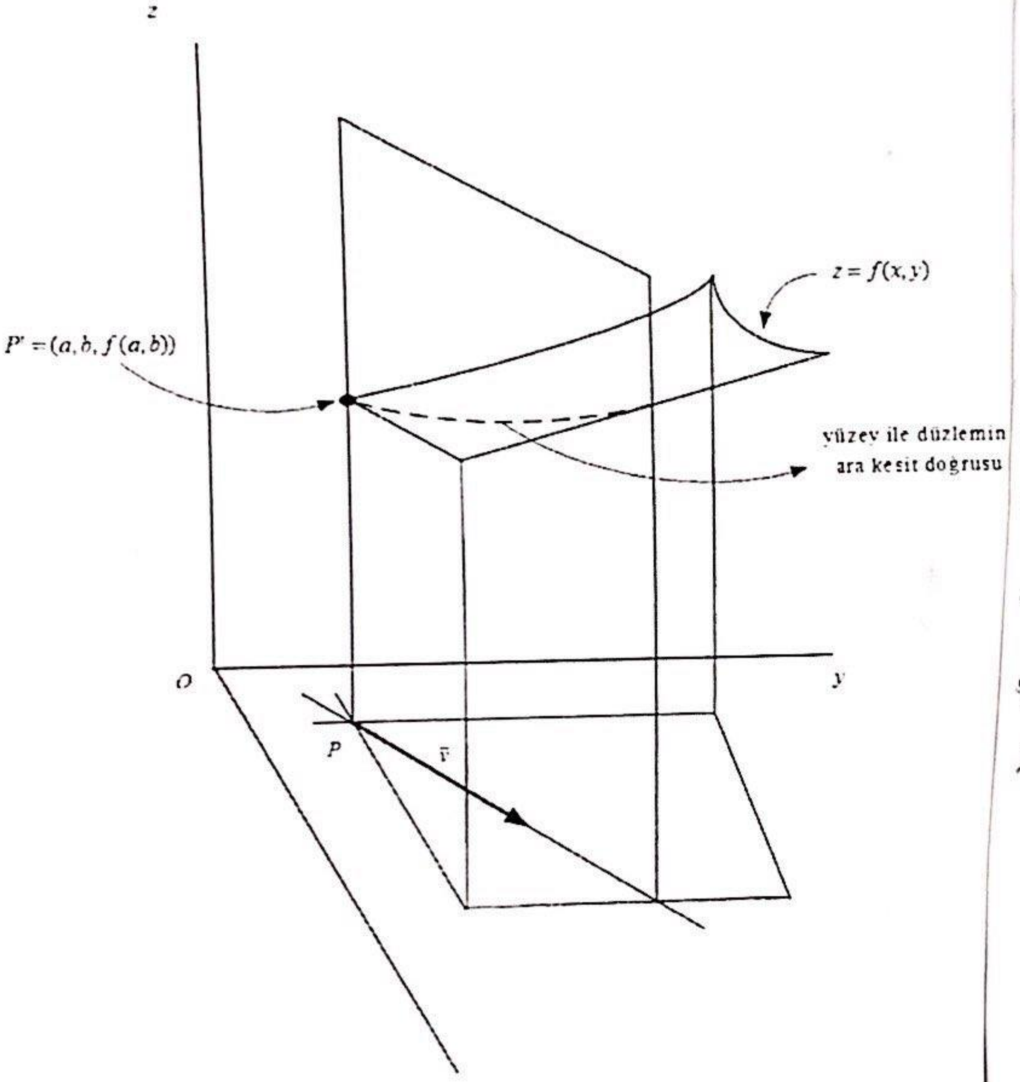
$$\Rightarrow \vec{v}_P[f] = 0$$

Sonuç: Tanım ve örneklerden de görüldüğü gibi $\vec{v}_P[f] \in \mathbb{R}$ dir. O halde $\forall \vec{v}_P \in T_{E^n}(P)$ tanjant vektörü,

$$\vec{v}_P : C(E^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyon olarak düşünülebilir.

Yöne Göre Türevin Geometrik Yorumu



* $P+t\vec{v}$; xoy düzleminde P olan geçen ve doğrultusu $\vec{v}$ olan doğruyu,
* $f(P+t\vec{v})=\beta(t)$; $P+t\vec{v}$ doğrusunu içeren ve z eksenine paralel olan düzlem ile $z=f(x,y)$ yüzeyinin β arakesit eğrisini ifade eder.

O halde $\frac{d}{dt}(f(P+t\vec{v}))\big|_{t=0}=\vec{V}_P[f]$ reel sayısı ise $t=0$ anına karşılık gelen $(a,b,f(a,b))$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimini verir.

Teorem 4. $f \in C(E^n, \mathbb{R})$, $P \in E^n$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\vec{v}_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \quad \text{dir.}$$

İspat:

$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ alalım. $\vec{v}_p[f] = \frac{d}{dt}\left(f(p + t\vec{v})\right)\Big|_{t=0}$ olduğunu biliyoruz.

$$f(p + t\vec{v}) = f(\underbrace{p_1 + tv_1}_{x_1}, \underbrace{p_2 + tv_2}_{x_2}, \dots, \underbrace{p_n + tv_n}_{x_n}) \quad \text{dir.}$$

Türevde zincir kuralından

$$\frac{d}{dt}\left(f(p+t\vec{v})\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

$$= v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(f(p+t\vec{v})\right)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p \quad \text{olur.}$$

" $t=0$ için $p + t\vec{v} = p$ dir "

Örnek: $f: E^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2xy + z^2 + y^2 + 3$ olsun. $P = (-4,1,3) \in E^3$ ve $\vec{V} = (3,2,0) \in \mathbb{R}^3$ için $\vec{V}_P[f] = ?$

Çözüm:

$$\vec{V}_P[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_P = 3\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P + 2\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P + 0\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_P$$

$$= 3.2y|_P + 2(2x+2y)|_P$$

$$= 6P_2 + 2(2P_1 + 3P_2)$$

$$= -6$$

Örnek: $f: E^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 x_2 x_3$ olsun. $\vec{V} = (1,0,-3) \in \mathbb{R}^3$ ve $P = (1,1,0) \in E^3$ için $\vec{V}_P[f] = ?$

Örnek: $\vec{V} = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ ve $P = (1,1,1) \in E^3$ veriliyor.

a) $f(x_1,x_2,x_3) = x_2^2 x_3$ b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2$ c) $f(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1}\cos x_2$

için $\vec{V}_P[f] = ?$

Teorem 5: $\forall f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$, $\forall \vec{V}_p, \vec{W}_p \in T_{E^n}(p)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

i) $(a\vec{V}_p + b\vec{W}_p)[f] = a\vec{V}_p[f] + b\vec{W}_p[f]$

ii) $\vec{V}_p[af + bg] = a\vec{V}_p[f] + b\vec{V}_p[g]$

iii) $\vec{V}_p[fg] = f(p)\vec{V}_p[g] + g(p)\vec{V}_p[f]$

İspat:

$\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\vec{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ olsun.

i) $a\vec{V}_p + b\vec{W}_p = a(p, \vec{V}) + b(p, \vec{W}) = (p, a\vec{V} + b\vec{W}) = (a\vec{V} + b\vec{W})|_p$

$a\vec{V} + b\vec{W} = (av_1 + bw_1, av_2 + bw_2, \ldots, av_n + bw_n)$

$$\Rightarrow (a\vec{V}_p + b\vec{W}_p)[f] = (a\vec{V} + b\vec{W})|_p[f]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (av_i + bw_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p + b \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$$

$$= a\vec{V}_p[f] + b\vec{W}_p[f]$$

ii) $\vec{V}_p[af+bg]=\sum_{i=1}^{n} v_i \left.\dfrac{\partial(af+bg)}{\partial x_i}\right|_p$

türev operatörü lineer olduğundan

$$=\sum_{i=1}^{n} v_i\left(a\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p+b\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_p\right)$$

$$=a\sum_{i=1}^{n} v_i\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p+b\sum_{i=1}^{n} v_i\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_p$$

$$=a\vec{V}_p[f]+b\vec{V}_p[g]$$

iii) $\vec{V}_p[fg]=\sum_{i=1}^{n} v_i \left.\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i}\right|_p$

$$=\sum_{i=1}^{n} v_i\left(f(p)\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_p+g(p)\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p\right)$$

$$=f(p)\sum_{i=1}^{n} v_i\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_p+g(p)\sum_{i=1}^{n} v_i\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p$$

$$=f(p)\vec{V}_p[g]+g(p)\vec{V}_p[f]$$

Sonuç: Teoremin (ii) şıkkından, $\forall \vec{V}_p \in T_{E^n}(p)$ tanjant vektörü için

$$\vec{V}_p : C(E^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

lineer dönüşümdür.

$C(E^n, \mathbb{R})$ ile ilgili cebirsel yapılar

1) $C(E^n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayıdır.

2) $C(E^n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir yapısı oluşturur.

3) $C(E^n, \mathbb{R})$, birimli ve değişmeli bir halkadır.

4) $\chi(E^n)$ bir $C(E^n, \mathbb{R})$ modüldür.

Vektör Alanı Yönündeki Türev

$f \in C(E^n, \mathbb{R})$ ve $X \in \mathcal{X}(E^n)$ verilsin. f nin X vektör alanı yönündeki türevi $X[f]$ ile gösterilir. $\forall p \in E^n$ için

$$(X[f])(p) = \vec{X}_p[f]$$

ile tanımlanır. Bu tanıma göre $X \in \mathcal{X}(E^n)$ için

$$X : C(E^n, \mathbb{R}) \to C(E^n, \mathbb{R})$$
$$f \to X[f] : E^n \to \mathbb{R}$$
$$p \to (X[f])(p) = \vec{X}_p[f]$$

dir.

Sonuç: Bir X vektör alanı iki şekilde ele alınabilir:

1) $X : C(E^n, \mathbb{R}) \to C(E^n, \mathbb{R})$ bir fonksiyondur.

2) X, E^n nin her noktasına bir tanjant vektör karşılık getiren fonksiyondur. Yani, $X : E^n \to \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(p)$ dir.

Teorem 6: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(E^n)$, $\forall f, g, h \in C(E^n, \mathbb{R})$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

i) $(fX+gY)[h] = fX[h] + gY[h]$

ii) $X[af+bg] = aX[f] + bX[g]$

iii) $X[fg] = fX[g] + gX[f]$

İspat:

i) $\forall p \in E^n$ için

$$
\begin{aligned}
(fX+gY)[h](p) &= (fX+gY)\big|_p[h] \\
&= \big(f(p)X_p + g(p)Y_p\big)[h]
\end{aligned}
$$

Teorem 5 i den

$$
\begin{aligned}
&= f(p)X_p[h] + g(p)Y_p[h] \\
&= f(p)(X[h])(p) + g(p)(Y[h])(p) \\
&= (fX[h])(p) + (gY[h])(p) \\
&= \big(fX[h] + gY[h]\big)(p)
\end{aligned}
$$

iki fonksiyonun eşitliği tanımından $(fX+gY)[h] = fX[h] + gY[h]$ olur.

Sonuç: Teoremin ü şıkkından $\forall X \in \chi(E^n)$ vektör alanı için

$$X : C(E^n, \mathbb{R}) \to C(E^n, \mathbb{R})$$

lineer dönüşümdür.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Yöne Göre Türev

Ders 6