ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

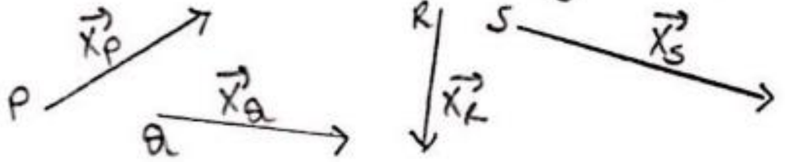
Ders 5

VEKTÖR ALANLARI VE VEKTÖR ALANLARI UZAYI

E^n n-boyutlu Öklid uzayı verilsin. E^n nin $P\in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(P)$ ve bu uzayların birlesimi de $\bigcup\limits_{P\in E^n} T_{E^n}(P)$ (E^n üzerindeki tüm tanjant uzaylar) olsun.

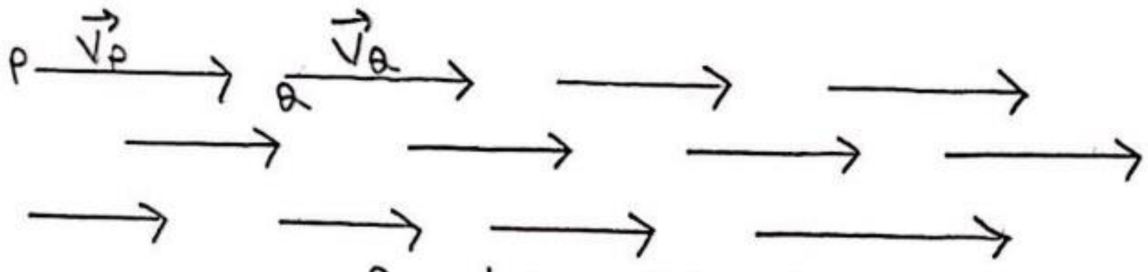
$$X: E^n \longrightarrow \bigcup_{P\in E^n} T_{E^n}(P)$$

fonksiyonuna E^n de bir vektör alanı adı verilir. Bu tanıma göre E^n de bir vektör alanı E^n nin her noktasına bir tanjant vektör karsılık getiren fonksiyondur.



Yukarıdaki sekilde E^n nin her noktasına bir tanjant vektör karsılık gelmiştir. Her noktaya yukarıdaki gibi tanjant vektör karsılık getiren $X: E^2 \longrightarrow \bigcup\limits_{P\in E^2} T_{E^2}(P)$ fonksiyonu bir vektör alanıdır.

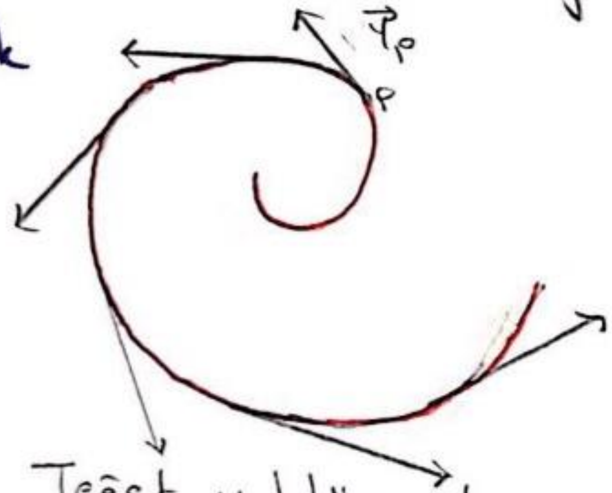
Örnek



Paralel Vektör Alanı

Yukarıdaki V vektör alanı, düzlemin her noktasına birbirine paralel olacak biçimde tanjant vektörler karşılık getirir.

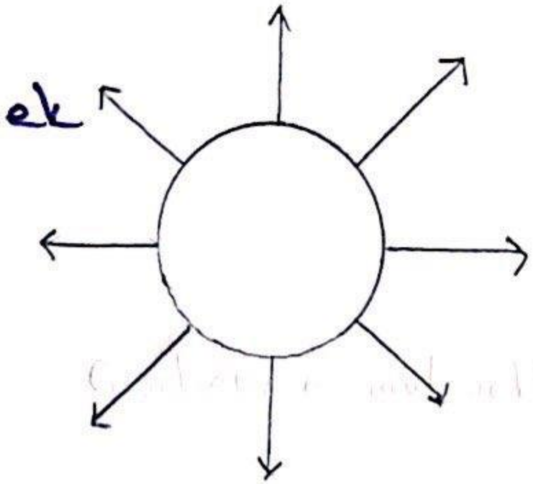
Örnek



Teğet vektör alanı

Yandaki Y vektör alanı, eğri üzerindeki her noktaya eğrinin o noktadaki teğeti olan tanjant vektörü karşılık getirir.

Örnek



Çemberin normal vektör alanı

Gösterim: E^n üzerindeki tüm vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}(E^n)$ ile gösterilir.

Vektör Alanları Uzayı

$\mathcal{X}(E^n)$ kümesi üzerinde tanımlı toplama ve skalar ile çarpma işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya E^n nin vektör alanları uzayı denir.

$\chi(E^n)$ de toplama:

$\forall X, Y \in \chi(E^n)$ için X ile Y nin toplamı $X+Y$ ile gösterilir ve $\forall P \in E^n$ için $(X+Y)(P) = X(P) + Y(P) = \vec{X}_P + \vec{Y}_P$ ile tanımlanır.

$X \in \chi(E^n)$ olduğundan $X(P) = \vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$

$Y \in \chi(E^n)$ olduğundan $Y(P) = \vec{Y}_P \in T_{E^n}(P)$ dir.

$T_{E^n}(P)$ vektör uzayı olduğundan $\vec{X}_P + \vec{Y}_P \in T_{E^n}(P)$ olur.

O halde $(X+Y)(P) = X(P) + Y(P) \in T_{E^n}(P)$ dir.

$$\Rightarrow X+Y : E^n \longrightarrow \bigcup_{P \in E^n} T_{E^n}(P) \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow X+Y \in \chi(E^n) \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow + : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \longrightarrow \chi(E^n) \text{ iç işlemdir.}$$

Yukarıdaki işlem ile birlikte $(\chi(E^n), +)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Skalar ile çarpma:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall X \in \chi(E^n)$ için λ ile X in çarpımı $\lambda \odot X = \lambda X$ ile gösterilir ve $\forall P \in E^n$ için $(\lambda X)(P) = \lambda \vec{X}_P$ ile tanımlanır.

$X \in \chi(E^n)$ olduğundan $X(P) = \vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$ dir.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$ için $T_{E^n}(P)$ vektör uzayı olduğundan $\lambda \vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$ olur.

$$\Rightarrow (\lambda X)(P) = \lambda \vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$$

$$\Rightarrow \lambda X \in \chi(E^n)$$

$$\Rightarrow \odot : \mathbb{R} \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$$ dış işlemdir.

Yukarıdaki dış işlem vektör uzayı aksiyomlarını sağlar.

O halde $\chi(E^n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Bir Reel Değerli Fonksiyon ile Bir Vektör Alanının Çarpımı

$f: E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $X \in \chi(E^n)$ verilsin. f ile X in çarpımı $\forall P \in E^n$ için $(fX)(P) = f(P)\vec{X}_P$ ile tanımlanır.

$f(P) \in \mathbb{R}$ ve $\vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$ için $f(P)\vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$ dir.

$\Rightarrow (fX)(P) = f(P)\vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$

$\Rightarrow fX \in \chi(E^n)$ dir.

Örnek

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = (1,0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = (0,1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vdots$$

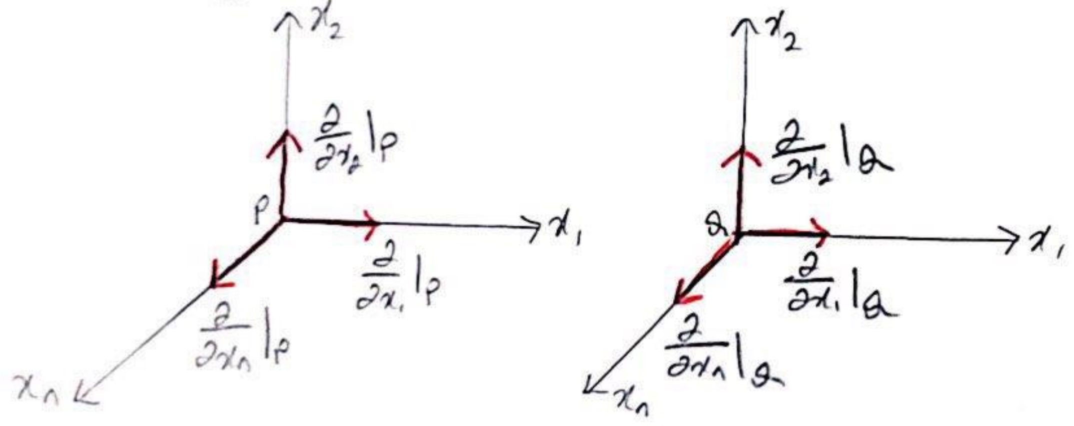
$$\frac{\partial}{\partial x_n} = (0,0,0,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n)$ dir. $1 \leq i \leq n$

Soru: $\frac{\partial}{\partial x_1}$ bir vektör alanı ise bir noktaya tanjant vektör karsılık getirmelidir. $\frac{\partial}{\partial x_1}$, bir p noktasına nasıl tanjant vektör karsılık getirir?

Cevap:

P noktasındaki $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dik koordinat sistemini düzenelim. $\frac{\partial}{\partial x_1}$, P noktasına x_1 üzerindeki baslangıç noktası P olan birim vektörü karsılık getirir. Aynı sekilde $\frac{\partial}{\partial x_2}$ de P noktasına x_2 üzerindeki baslangıç noktası P olan birim vektörü karsılık getirir. Aynı sekilde...



seklindedir.

$\mathcal{X}(E^n)$ nin bazı

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ kümesi $\mathcal{X}(E^n)$ için bazdır:

Lineer bağımsızlık:

$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \vec{0}$ olsun.

$\Rightarrow \lambda_1(1,0,\ldots,0) + \lambda_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + \lambda_n(0,0,\ldots,1) = \vec{0} = (0,0,\ldots,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0,0,\ldots,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ lineer bağımsızdır.

Germe Aksiyomu:

$\mathcal{X}(E^n) \overset{?}{=} Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$

$\forall X \in \mathcal{X}(E^n)$ alalım. $P \in E^n$ için $X(P) = \vec{X}_P \in T_{E^n}(P)$ dir.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P\right\}$ $T_{E^n}(P)$ için baz olduğundan

$$\vec{X}_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\Rightarrow \vec{X}_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(P, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$\Rightarrow (P, X) = \left(P, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow X \in Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

$$\Rightarrow \chi(E^n) = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

O halde $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ kümesi $\chi(E^n)$ için bazdır.

Sonuç: boy $\chi(E^n) = n$ dir.

Sonuç: boy E^n = boy $T_{E^n}(P)$ = boy $\chi(E^n) = n$ dir.

Örnek

E^2 de $\{x_1, x_2\}$ Öklid koordinat sistemi verilsin.

$$X = x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2(x_1^2 - x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

vektör alanı ve $P = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ için $X(P) = \vec{X}_P$ tangant vektörünü bulunuz. Şeklini çiziniz.

Açıklama: x_1 ve x_2 Öklid koordinat fonksiyonları olduğundan $P = (p_1, p_2)$ için

$$x_1 : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \rightarrow x_1(P) = p_1 \qquad \text{ve} \qquad x_2 : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad P \rightarrow x_2(P) = p_2$$

dir.

Bir reel değerli fonksiyon ile bir vektör alanının çarpımı yine bir vektör alanı olacağından X vektör alanıdır.

Çözüm:

$$X(p)=\left(x_1x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+2(x_1^2-x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(p)$$

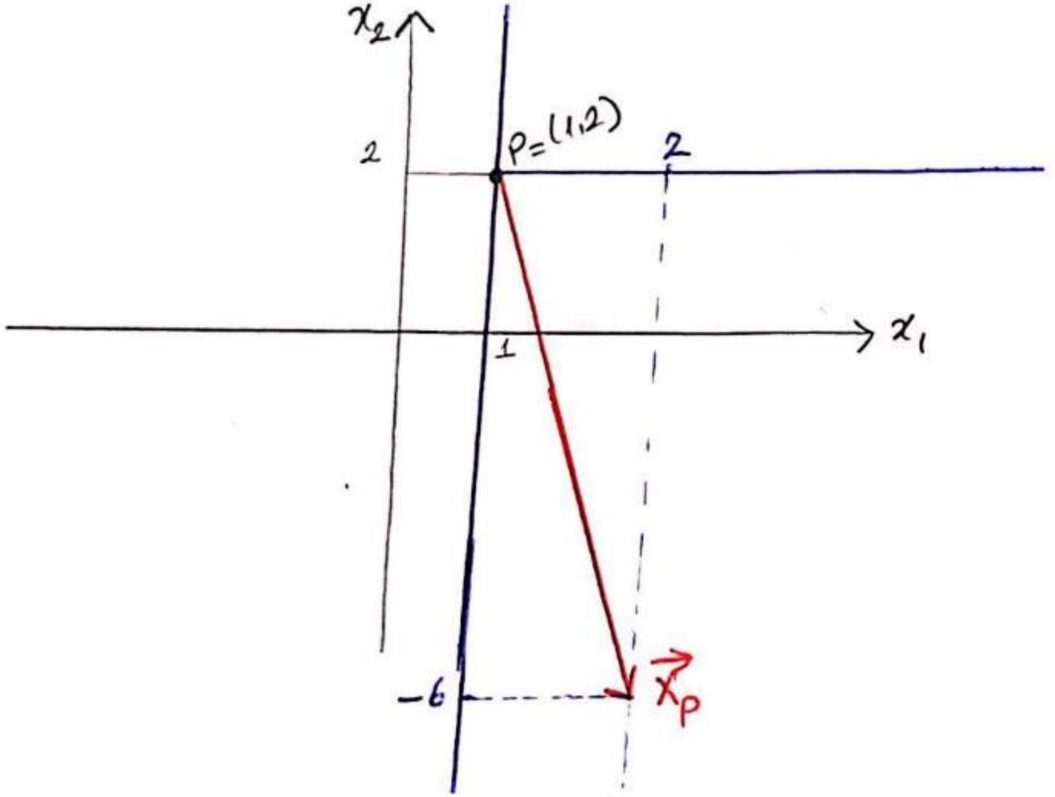
$$=x_1(p)\,x_2(p)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p+2\left(x_1^2(p)-x_2^2(p)\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

$$=p_1p_2\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p+2(p_1^2-p_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

$$=1.2\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p+2(1^2-2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

$$=2\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p+(-6)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p$$

$P=(1,2)$, $\vec{X}_P=(2,-6)$ idi.



ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Vektör Alanı , Vektör Alanı Uzayı

Vektör Alanı Uzayının Bazı

Ders 5