ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

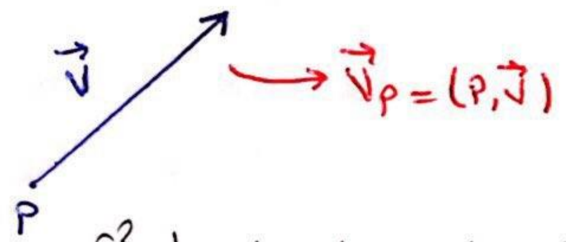
DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 4

TANJANT VEKTÖRLER VE TANJANT UZAYLAR

V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve A da V ile eslenen bir afin uzay olsun. $P \in A$ noktası ve $\vec{v} \in V$ vektörü icin $(P, \vec{v})$ ikilisine $P \in A$ noktasında bir tanjant vektör denir.



E^2 de bir tanjant vektör

Gösterim: A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tüm tanjant vektörlerin kümesi $T_A(P)$ ile gösterilir.

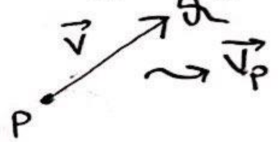
$$\Rightarrow T_A(P) = \{ \vec{v}_P = (P, \vec{v}) \mid P \in A, \vec{v} \in V \}$$

Tanjant Vektörün Koordinatları

A, n-boyutlu V vektör uzayı ile eşlenen afin uzay ve A da bir afin çatı $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ olsun. Afin çatı tanımından $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi V nin bazıdır. $\vec{V}_P \in T_A(P)$ tanjant vektörü verilsin.

$$\vec{V}_P = (P, \vec{v}) \;, \; P \in A \;, \vec{v} \in V \text{ dir.}$$

$P \in A$, $\vec{v} \in V$ için A2 afin aksiyomu gereğince $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ vardır.



$\vec{V}_P = \overrightarrow{PQ}$ olacaktır. Baz cinsinden

$$\vec{V}_P = \overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$$ yazılabilir. $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ n-lisine $\vec{V}_P$

tanjant vektörünün koordinatları denir. $\vec{V}_P = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_P$ olur.

TANJANT UZAY

A afin uzayının $P \in A$ noktasında tanımlı tüm tanjant vektörlerin kümesi $T_A(P)$, üzerinde tanımlı toplama ve skalar ile çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır. Bu uzaya A nın $P \in A$ noktasındaki tanjant uzayı denir.

$T_A(P)$ de toplama:

$\forall \vec{v}_P, \vec{u}_P \in T_A(P)$ için $\vec{v}_P$ ile $\vec{u}_P$ nin toplamı,

$\vec{v}_P + \vec{u}_P = (P, \vec{v}) + (P, \vec{u}) = (P, \vec{v} + \vec{u})$ ile tanımlanır. $\vec{v}, \vec{u} \in V$ olduğundan $\vec{v} + \vec{u} = \vec{w} \in V$ dir.

$\Rightarrow \vec{v}_P + \vec{u}_P = (P, \vec{w}) = \vec{w}_P \in T_A(P)$ olur.

$\Rightarrow + : T_A(P) \times T_A(P) \rightarrow T_A(P)$ iç işlemdir.

Bu işlem ile birlikte $(T_A(P), +)$ ikilisi değişmeli gruptur.

$+$ işleminin birim elemanı, $\vec{0}_P = (P, \vec{0})$, $P \in A$, $\vec{0} \in V$ dir.

Skalar ile Çarpma

$\forall \lambda \in \mathcal{F}$ ve $\forall \vec{v}_P \in T_A(P)$ için λ ile $\vec{v}_P$ nin çarpımı,

$\lambda \odot \vec{v}_P = \lambda \vec{v}_P = \lambda (P, \vec{v}) = (P, \lambda \vec{v})$ ile tanımlanır.

$\lambda \in \mathcal{F}, \vec{v} \in V$ için $\lambda \vec{v} = \vec{w} \in V$ dir.

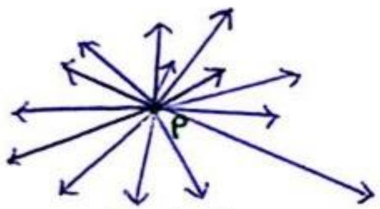
$\Rightarrow \lambda \vec{v}_P = (P, \vec{w}) = \vec{w}_P \in T_A(P)$ olur.

$\Rightarrow \odot : \mathcal{F} \times T_A(P) \longrightarrow T_A(P)$ dış işlemdir.

Bu dış işlem vektör uzayı aksiyomlarını sağlar.

Sonuç: $\{T_A(P), +, \mathcal{F}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır.

Özel Hal: $A = E^n$ alınırsa $T_{E^n}(P)$ kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya E^n nin $P \in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı denir.



$T_{E^2}(P)$ uzayı

İki Tanjant Vektörün Eşitliği

$\vec{V}_P=(P,\vec{v})$ ve $\vec{U}_Q=(Q,\vec{u})$ tanjant vektörleri için

$\vec{V}_P=\vec{U}_Q \Leftrightarrow P=Q$ ve $\vec{v}=\vec{u}$ dır.

$T_{E^n}(P)$ nin Bazı

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}=(1,0,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}=(0,1,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n}=(0,0,0,\dots,1)\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

olmak üzere $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P,\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P,\dots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P\right\}$ kümesi $T_{E^n}(P)$ için bazdır:

Lineer Bağımsızlık:

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p = \vec{0}_p \quad \text{olsun. } (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \lambda_1\left(p, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \lambda_2\left(p, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \cdots + \lambda_n\left(p, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \vec{0}_p$$

$$\Rightarrow \left(p, \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = (p, \vec{0})$$

iki tanjant vektörün eşitliği tanımından

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \vec{0} \quad \text{olur.}$$

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ nin standart bazı olduğundan lineer bağımsızdır.

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\} \text{ lineer bağımsızdır.}$$

Germe Aksiyomu

$$T_{E^n}(p) \stackrel{?}{=} Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$$

$\forall \vec{v}_p \in T_{E^n}(p)$ olsun. $\vec{v}_p = (p, \vec{v})$, $p \in E^n$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ dir.
$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ve $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ $\mathbb{R}^n$ nin bazı olduğundan $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ yazılabilir.

$$\vec{v}_p = (p, \vec{v}) = \left(p, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

$$\Rightarrow \vec{v}_p \in Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$$

$$\Rightarrow T_{E^n}(p) = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$$

Sonuç: $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$ $T_{E^n}(p)$ nin bazıdır.

Sonuç: $boy\, T_{E^n}(p) = n$

Örnek: $P=(0,2,1)\in E^3$ ve $\vec{v}=(1,2,3)$, $\vec{u}=(-2,3,4)\in \mathbb{R}^3$ verilsin.

$$2\vec{u}_P-3\vec{v}_P=?$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}2\vec{u}_P-3\vec{v}_P &= 2\vec{u}_P+(-3)\vec{v}_P\\ &= 2(P,\vec{u})+(-3)(P,\vec{v})\\ &= (P,2\vec{u})+(P,(-3)v)\\ &= (P,2\vec{u}+(-3)\vec{v})\\ &= (2\vec{u}+(-3)\vec{v})_P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\vec{u}+(-3)\vec{v} &= 2(-2,3,4)+(-3)(1,2,3)\\ &= (-7,0,-1)\end{aligned}$$ olup

$2\vec{u}_P-3\vec{v}_P=(-7,0,-1)_P$ olur.

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Tanjant Vektör , Tanjant Uzay

Tanjant Uzayın Bazı

Ders 4