ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 3

PROBLEMLER

1) $\mathbb{R}^3$ de $P_0=(1,1,0)$, $P_1=(1,2,3)$, $P_2=(0,1,1)$, $P_3=(0,1,0)$ noktaları veriliyor. $\{P_0,P_1,P_2,P_3\}$ ün $\mathbb{R}^3$ de başlangıcı P_0 olan afin çatı olduğunu gösteriniz.

2) $P_1, P_2, \dots, P_k$ bir afin uzayında herhangi k nokta olsun. Bu durumda,

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \dots + \overrightarrow{P_{k-1}P_k} + \overrightarrow{P_kP_1} = \vec{0}$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Tümevarım metodunu kullanacağız:

$k=1$ için $\overrightarrow{P_1P_1} = \vec{0}$ olup doğrudur.

$k=n$ için doğru olsun. Yani $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = \vec{0}$ olsun.

$k=n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n + P_nP_{n+1} + P_{n+1}P_1 = \vec{0} \; ?$$

$k=n$ için doğru kabul ettiğimiz eşitlikte $\overrightarrow{P_nP_1} = \overrightarrow{P_nP_{n+1}} + \overrightarrow{P_{n+1}P_1}$ yazarak

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_{n+1}} + \overrightarrow{P_{n+1}P_1} = \vec{0}$$ olur.

O halde $k=n+1$ için de doğrudur. Yani eşitlik $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için doğru olmuş olur.

3) a- $B=\{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ nin afin altuzayı olduğunu gösteriniz.

b- $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=3\}\subset\mathbb{R}^2$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ nin afin altuzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Hatırlatma: A, V ile birleşen afin uzay ve $B\neq\emptyset$, $B\subset A$ olsun. Herhangi bir $P\in B$ için $W_P(B)=\{\overrightarrow{PX} \mid X\in B\}$ kümesi V nin bir altuzayı ise B ye A nın bir afin altuzayı denir.

b- $B\neq\emptyset$ dir $(\exists\,(3,-3)\in B)$, $B\subset\mathbb{R}^2$ dir (açık)

$P=(1,2)\in B$ alalım.

$$W_P(B)=\{\overrightarrow{PX} \mid X\in B\}=\{X-P \mid X\in B\}=\{(x,3-x)-(1,2) \mid x\in\mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow W_P(B)=\{(x-1,1-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ nin alt vektör uzayı olduğunu göstereceğiz.

$W_p(B) = \{(x-1,\ 1-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$*$ $W_p(B) \neq \emptyset$ $\left(0 \in \mathbb{R} \text{ için } (0-1, 1-0) = (-1, 1) \in W_p(B)\right)$

$*$ $W_p(B) \subset \mathbb{R}^2$ (açık)

i) $\forall X, Y \in W_p(B)$ için $X+Y \overset{?}{\in} W_p(B)$.

$X = (x-1, 1-x)$, $Y = (y-1, 1-y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ olsun.

$$X+Y = (x-1+y-1,\ 1-x+1-y)$$
$$= (\underbrace{x+y-1}_{a}-1,\ 1-(\underbrace{x+y-1}_{a}))$$
$$= (a-1, 1-a) \in W_p(B)$$

ii) $\forall X \in W_p(B)$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda X \overset{?}{\in} W_p(B)$

$X = (x-1, 1-x)$, $x \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\lambda X = (\lambda x - \lambda,\ \lambda - \lambda x)$$
$$= (\lambda x - \lambda - 1 + 1,\ \lambda - \lambda x - 1 + 1)$$
$$= (\underbrace{\lambda x - \lambda + 1}_{a} - 1,\ 1 - (\underbrace{\lambda x - \lambda + 1}_{a})) = (a-1, 1-a) \in W_p(B)$$

4) X, Y, Z E^2 de üç farklı nokta olsun. $\overrightarrow{XY}$ ile $\overrightarrow{XZ}$ arasındaki açı θ olmak üzere

$$d(Y,Z)^2 = d(Y,X)^2 + d(X,Z)^2 - 2\, d(Y,X)\, d(X,Z) \cos\theta$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

A_2 afin aksiyomu gereğince $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XZ}$ yazılabilir.

$$d(Y,Z)^2 = \|\overrightarrow{YZ}\|^2 = \|\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XZ}\|^2 = \|\overrightarrow{YX} - \overrightarrow{ZX}\|^2$$

$$\Rightarrow d(Y,Z)^2 = \langle \overrightarrow{YX} - \overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{YX} - \overrightarrow{ZX} \rangle$$

$$= \langle \overrightarrow{YX}, \overrightarrow{YX} \rangle - \langle \overrightarrow{YX}, \overrightarrow{ZX} \rangle - \langle \overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{YX} \rangle + \langle \overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZX} \rangle$$

$$= \|YX\|^2 - 2\langle \overrightarrow{YX}, \overrightarrow{ZX} \rangle + \underbrace{\|ZX\|^2}_{\|XZ\|^2}$$

$$= d(Y,X)^2 + d(X,Z)^2 - 2\|YX\| . \|XZ\| . \cos\theta$$

$$= d(Y,X)^2 + d(X,Z)^2 - 2\, d(Y,X) . d(X,Z) \cos\theta$$

5) E^2 de $S=\left\{P_0=(0,0),\ P_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ P_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$ nokta sisteminin

öklid çatısı olduğunu gösteriniz. $P=(3,2)\in E^2$ noktasının S çatısına

göre koordinatlarını bulunuz.

6) $\mathbb{R}^2$ vektör uzayında $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için $\langle X,Y\rangle=2(x_1y_1+x_2y_2)$ iç çarpımını tanımlayalım. Bu iç çarpımı kullanarak $\mathbb{R}^2$ de verilen $P_0=(0,0)$, $P_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $P_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ noktaların dik üçgen oluşturup oluşturmadığını inceleyiniz.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Problem Çözümü

Ders 3