ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 1

AFİN UZAY

Tanım: $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\Psi : A \times A \longrightarrow V$$
$$(P,Q) \longrightarrow \Psi(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$$

ile tanımlı Ψ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanırsa A ya V ile eşlenen veya birleşen bir afin uzay denir.

A1) $\forall P,Q,R \in A$ için $\Psi(P,Q) + \Psi(Q,R) = \Psi(P,R)$ $\quad (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR})$

A2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\Psi(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ vardır.

Örnek: $\mathbb{R}^n$, sıralı n-lilerin kümesi $\mathbb{R}^n$, n boyutlu standart reel vektör uzayı ile birleşen bir afin uzaydır:

$A=\mathbb{R}^n$ ve $V=\mathbb{R}^n$ dir.

$$\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(P,Q) \longrightarrow \Psi(P,Q) = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

A1) $\forall P,Q,R \in A$ için $\Psi(P,Q)+\Psi(Q,R) \stackrel{?}{=} \Psi(P,R)$

$$\begin{aligned}\Psi(P,Q)+\Psi(Q,R) &= \vec{PQ}+\vec{QR} \\ &= \vec{OQ}-\vec{OP}+\vec{OR}-\vec{OQ} \\ &= \vec{OR}-\vec{OP} \\ &= \vec{PR} \\ &= \Psi(P,R)\end{aligned}$$

A2) $\forall P \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ için $\mathcal{A}(P,Q)=\alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in \mathbb{R}^n$ var mıdır?

$P=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ ve $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ alalım. $Q=(q_1,q_2,\dots,q_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathcal{A}(P,Q)=\alpha \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=\alpha$

$$\Rightarrow (q_1-p_1, q_2-p_2, \dots, q_n-p_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$

$$\Rightarrow q_i - p_i = \alpha_i \ , \ 1 \le i \le n$$

$$\Rightarrow q_i = p_i + \alpha_i \ , \ 1 \le i \le n$$

$$\Rightarrow q_1 = \underbrace{p_1+\alpha_1}_{\in \mathbb{R}} \ , \ q_2 = \underbrace{p_2+\alpha_2}_{\in \mathbb{R}} \ , \ \dots \ , \ q_n = \underbrace{p_n+\alpha_n}_{\in \mathbb{R}}$$ olur.

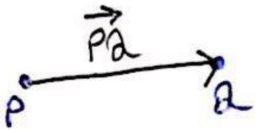
O halde $P=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ ve $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ verildiğinde $(p_1+\alpha_1, p_2+\alpha_2, \dots, p_n+\alpha_n) = Q \in \mathbb{R}^n$ alınırsa $\overrightarrow{PQ}=\alpha$ olur.

Verilen P ve Q için p_i ve α_i ler tek olarak belli olduğundan $p_i+\alpha_i = q_i$, $1 \le i \le n$ tek olarak bellidir. O halde $Q \in \mathbb{R}^n$ tektir.

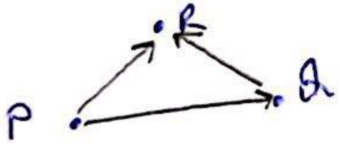
Örnek: $\mathbb{R}^2$ düzleminin $\mathbb{R}^2$ ile birleşen bir afin uzay olduğunu görsel olarak ifade edebiliriz:

$$\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(P,Q) \longrightarrow \psi(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$$

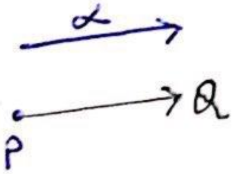
$\mathbb{R}^2$ de verilen iki noktaya bir vektör karşılık getiren ψ dönüşümünü tanımlayalım. $\mathbb{R}^2$ nin iki noktasına bir vektör karşılık geldiğini görsel olarak ifade edebiliriz:



A1) $\forall P,Q,R \in \mathbb{R}^2$ için $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ dir:



A2) $\forall P \in \mathbb{R}^2$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in \mathbb{R}^2$ vardır:



Afin Uzay-Vektör Uzayı Karşılaştırması

A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olsun.

1) V nin elemanları birer vektör iken A nın elemanları ise bir kümenin sıradan elemanlarıdır.

2) V de $\forall \alpha \in V$ için $\alpha + \vec{0} = \vec{0} + \alpha = \alpha$ olacak şekilde özel bir vektör varken A da böyle bir nokta yoktur.

Afin Aksiyomlardan Elde Edilen Sonuçlar

1) Afin uzayında iki nokta bir vektör belirtir (f nin tanımından)

2) A2 afin aksiyomu gereğince A afin uzayında bir P noktası tespit edildiğinde A nın her noktası V nin bir vektörüne karşılık gelir.

Teorem 1: V bir vektör uzayı ve A da V ile birleşen afin uzayı olsun.

1) $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$

2) $\forall P, Q \in A$ için $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

3) $\forall P, Q, P', Q' \in A$ için $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

İspat:

1) A1 afin aksiyomundan $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ dir. Bu eşitlik A daki herhangi üç $P, Q, R \in A$ noktaları için doğru olduğundan bu noktaların üçünü de $P \in A$ aldığımızda da doğru olur.

$$\Rightarrow \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$$

bulunur. $\overrightarrow{PP} \in V$, $(V, +)$ değişmeli grup ve bir grupta karesi kendisine eşit olan eleman birim eleman olacağından $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ olur.

2) Yukarıdaki aynı düşünce ile $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ eşitliğinde R yerine P alınırsa $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} \text{ olur.}$$

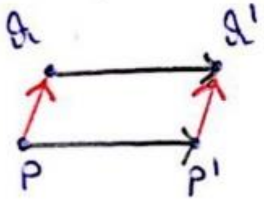
3) $P, Q, Q' \in A$ için $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'}$

$P, P', Q' \in A$ için $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ'}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ olduğundan $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'}$ bulunur.

Not: Teoremin 3. şıkkının $\mathbb{R}^2$ afin uzayındaki karşılığı aşağıdaki şekilde görülmektedir:



$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ olur.

Afin Çatı:

V, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde n-boyutlu vektör uzayı ve A da V ile birleşen afin uzay olsun. $P_0, P_1, \ldots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör kümesi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisine başlangıç noktası P_0 olan bir afin çatı denir.

Örnek: $\mathbb{R}^n$ afin uzayında

$$E_0=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$$
$$E_1=(1,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$$
$$\vdots$$
$$E_n=(0,0,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$$

noktaları verilsin. $\{E_0,E_1,\ldots,E_n\}$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ de başlangıç noktası E_0 olan bir afin çatı olduğunu gösterelim:

$\overrightarrow{E_0E_1}=(1,0,\ldots,0)$, $\overrightarrow{E_0E_2}=(0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $\overrightarrow{E_0E_n}=(0,0,\ldots,1)$ olup $\{\overrightarrow{E_0E_1},\overrightarrow{E_0E_2},\ldots,\overrightarrow{E_0E_n}\}$ $\mathbb{R}^n$ nin eşleştiği $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının standart bazıdır. O halde $\{E_0,E_1,\ldots,E_n\}$ başlangıç noktası E_0 olan bir afin çatıdır.

Not: Bir A afin uzayının boyutu, eşleştiği V vektör uzayının boyutu olarak tanımlanır. Yani boy V = boy A dır.

Teorem 2: A, V ile eşlenen n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. A da belli bir $P_0\in A$ noktası tespit edildiğinde başlangıç noktası P_0 olan bir afin çatı daima vardır.

İspat:

boy$A=n$ olduğundan boy$V=n$ olur. V nin bir $\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ bazını alalım.

$P_0\in A$ ve $\alpha_1\in V$ için A2 gereğince $\overrightarrow{P_0P_1}=\alpha_1$ olacak şekilde bir tek $P_1\in A$ vardır.

$P_0\in A$ ve $\alpha_2\in V$ için " $\overrightarrow{P_0P_2}=\alpha_2$ " " " $P_2\in A$ "

$\vdots$ $\vdots$

$P_0\in A$ ve $\alpha_n\in V$ için " $\overrightarrow{P_0P_2}=\alpha_2$ " " " $P_n\in A$ "

O halde $\{\underbrace{\overrightarrow{P_0P_1}}_{\alpha_1},\underbrace{\overrightarrow{P_0P_2}}_{\alpha_2},\dots,\underbrace{\overrightarrow{P_0P_n}}_{\alpha_n}\}$ V nin bazıdır.

Afin çatı tanımından $\{P_0,P_1,\dots,P_n\}$ A da bir afin çatıdır.

Afin Koordinat Sistemi

A, V vektör uzayı ile eşlenen n-boyutlu bir afin uzay olsun. A da bir $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ afin çatısı verilsin. Afin çatı tanımından $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi V nin bir bazıdır.

Bu kısımda, bir $P \in A$ noktası verildiğinde bu noktaya P nin afin koordinatı adını verdiğimiz bir sıralı n-li karşılık getireceğiz:

Bir $P \in A$ noktası alalım. A da iki nokta bir vektör belirteceğinden $\overrightarrow{P_0P} \in V$ dir. $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi V nin bazı olduğundan baz tanımından

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$$ yazılabilir $(a_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq n)$

Böylece aldığımız bir $P \in A$ noktası için n tane $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ sayılarını elde etmiş olduk. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sıralı n-lisine P nin **afin koordinatları** adı verilir. Baz cinsinden yazılış tek olacağından

$P \in A$ için $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tektir.

Bir $Q \in A$ için $\overrightarrow{P_0Q} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{P_0P_i}$ yazılabilir. $(b_i \in \mathcal{F}, 1 \leq i \leq n)$

$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sıralı n-lisi $Q \in A$ nın afin koordinatlarıdır.

$$x_i : A \longrightarrow \mathcal{F} \qquad , 1 \leq i \leq n$$

$$P \rightarrow x_i(P) = a_i$$

$$Q \rightarrow x_i(Q) = b_i$$

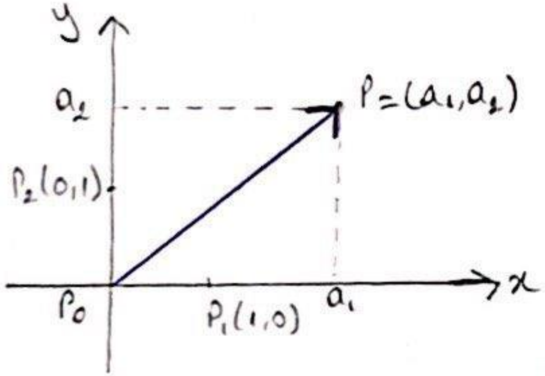
fonksiyonları yardımıyla tanımlanan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sistemine de afin koordinat sistemi adı verilir.

Özel Hal

$\mathbb{R}^2$ afin uzayında $P_0=(0,0)$, $P_1=(1,0)$, $P_2=(0,1)$ olmak üzere $\{P_0,P_1,P_2\}$ $\mathbb{R}^2$ için afin çatıdır. $P=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ noktası için

$$\overrightarrow{P_0P}=a_1\overrightarrow{P_0P_1}+a_2\overrightarrow{P_0P_2}$$

yazılabilir.



$$x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad , \qquad y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$P\to x(P)=a_1 \qquad\qquad P\to y(P)=a_2$$

olmak üzere $\{x,y\}$ $\mathbb{R}^2$ için afin koordinat sistemidir. P noktasının 1. bileşeni yatay doğrunun, 2. bileşeni ise düşey doğrunun üzerinde kaldığından $x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu yatay doğru ile, $y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da düşey doğru ile özdeşleşmiştir. Bu doğrulara bundan dolayı x ekseni ve y ekseni denir.

Uyarı: Bizim x ekseni ve y ekseni olarak bildiğimiz x ve y nin aslında birer fonksiyon olduğuna dikkat ediniz.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

DİFERANSİYEL GEOMETRİ I

Afin Uzay , Afin Çatı , Afin Koordinat Sistemi

Ders 1